La mallette à maths, des outils pour les RMC
2019 - 2020

# GRANDEURS ET MESURES

académie Normandie
RÉGION ACADÉMIQUE
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

2019 2020 année des mathématiques

21 MESURES POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

# Sommaire

| Fiche d'utilisation | Le domaine | Le niveau de l'activité | Matériel nécessaire |
|---|---|---|---|
| **Curvica** | Grandeurs | Cycle 3 | Un exemplaire de l'Annexe I par élève<br>Un exemplaire de l'Annexe III par élève |

# Qu'est-ce que le jeu de Curvica ?

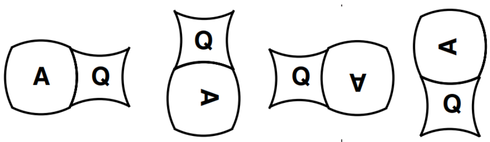
Curvica est un puzzle pédagogique de 24 pièces (Annexe I) inventé par Jean Fromentin. Les pièces, toutes différentes, sont constituées de 4 côtés, chacun pouvant être concave, convexe ou rectiligne. Les côtés concaves ou convexes seront nommés des arcs (a) et les côtés rectilignes des côtés (c).
Curvica permet de comparer sans calcul des périmètres et des aires de dessins construits à partir d'un carré, et permet de constater que ces deux grandeurs sont indépendantes.

# Les objectifs didactiques

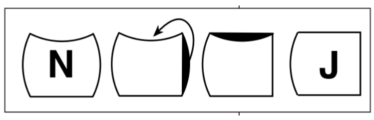
- Mettre en œuvre les trois composantes du triptyque Manipuler Verbaliser Abstraire.
- Classer des pièces selon leurs périmètres et leurs aires.
- Constater que ces deux grandeurs, aires et périmètres, sont indépendantes.

# La mise en œuvre

Étape 1 : l'enseignant distribue à chaque élève la planche de 24 pièces du Curvica de l'Annexe I. Il projette également l'Annexe II avec les pièces portant chacune une lettre pour les identifier et mieux communiquer avec les élèves. Ces derniers notent les noms des pièces sur l'Annexe I.
Étape 2 : Avant le découpage des pièces, on prend soin de faire remarquer aux élèves le fait que l'accolement des pièces dans le rectangle permet d'affirmer que la longueur d'un arc "bombé" par rapport à une pièce est la même que celle de l'arc "creusé" dans sa voisine. Puis les élèves découpent les pièces en suivant le contour.
Étape 3 : Les élèves doivent classer par groupes les pièces ayant le même périmètre. En remplaçant un côté droit par un côté courbe, on augmente la longueur du périmètre de la pièce. Ainsi, les élèves vont obtenir cinq groupes de pièces et ils vont devoir les ranger dans l'ordre croissant de leurs périmètres. Les groupes : 4 c ; 3c + 1a ; 2c + 2a ; 1c + 3a ; 4a.
Aussi surprenant que cela puisse paraître les pièces A et Q ont le même périmètre.




Étape 4 : Il faut maintenant en faire autant pour les aires. Nous pouvons commencer par comparer les pièces A et Q en demandant laquelle des deux pièces a nécessité le plus de papier ?
Plusieurs propositions vont émerger : la superposition directe (A et Q) et le découpage –collage.

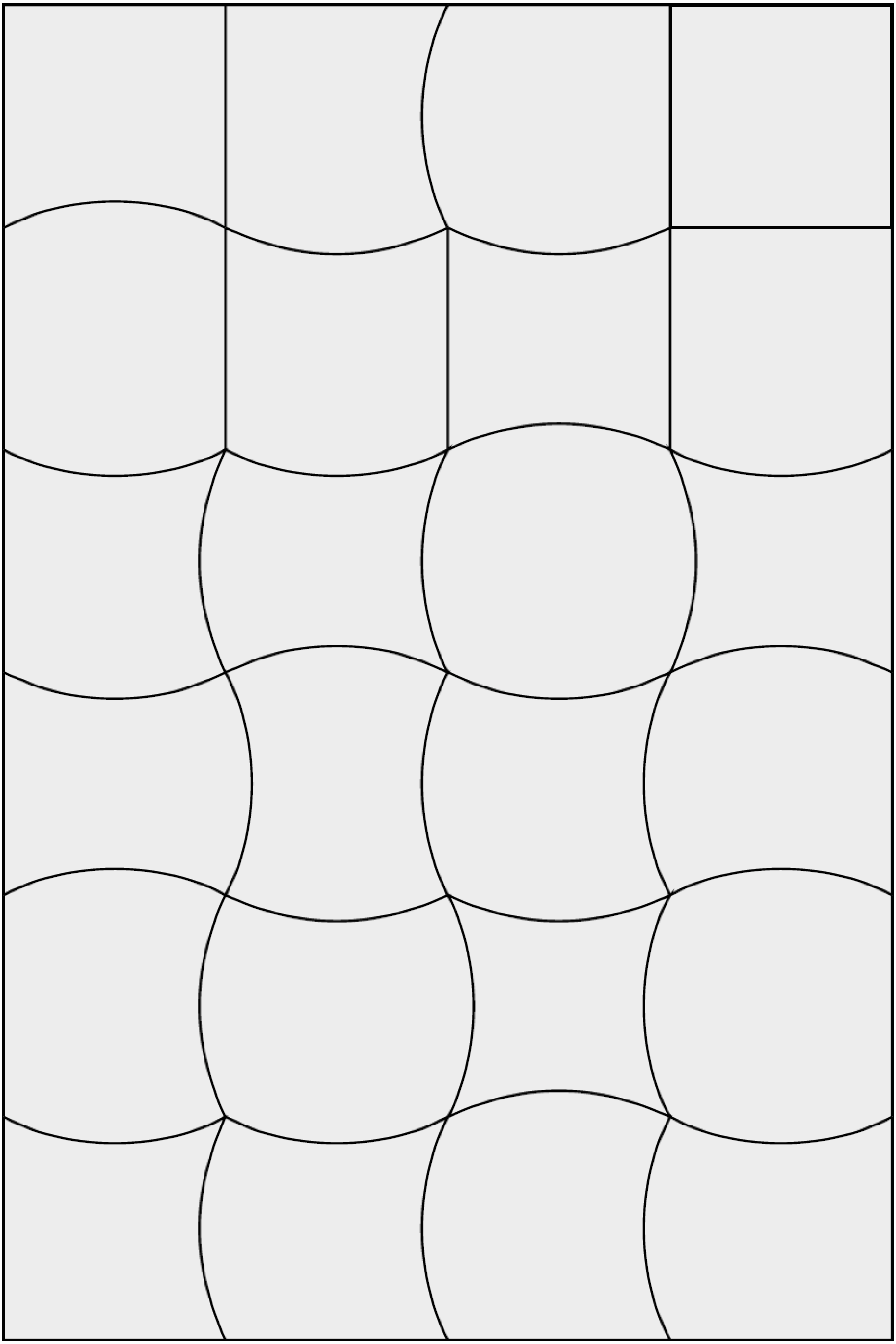



Nous devons obtenir un tableau du type de celui de l'Annexe III.

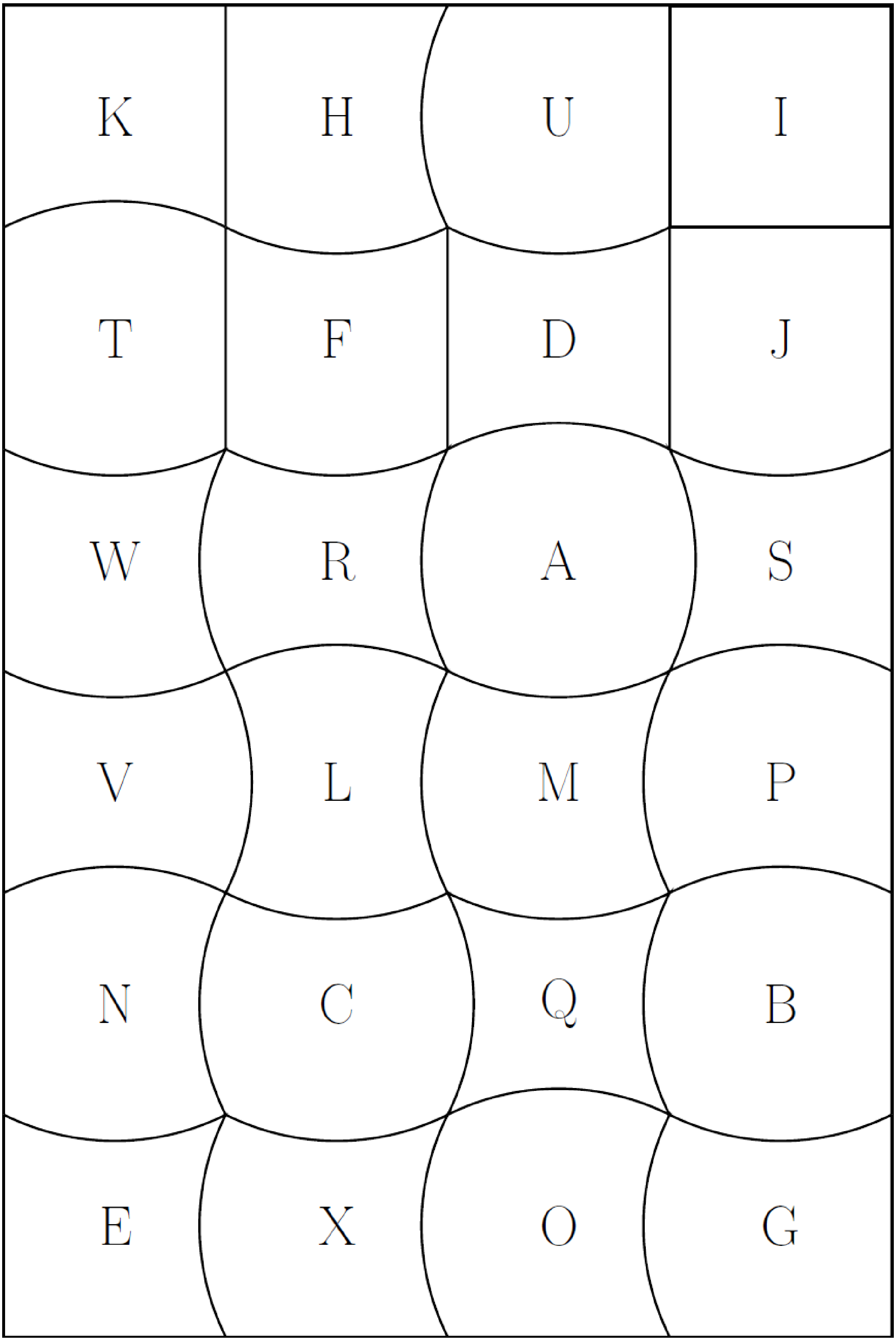
# Remarques et prolongements

- Les élèves peuvent se mettre en quête de classer les pièces en fonction du nombre d'axes de symétrie.
- Si le cœur nous en dit, ils peuvent rechercher eux-mêmes les formes des différentes pièces avec l'Annexe IV.
- Le Curvica existe aussi en forme triangulaire (Curvitri), ce qui permet de différencier ou de proposer une activité de réinvestissement. (Annexe V)
- On pourra utiliser les animations de Roland Dassonval : [http://rdassonval.free.fr/flash/6.html](http://rdassonval.free.fr/flash/6.html)

# Annexe I



# Annexe II



# Annexe III

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | Q | | R | | L M | | C | | A |
| 3 | | S | | V W X | | N O P | | B | |
| 2 | | | D E | | F G H | | T U | | |
| 1 | | | | K | | J | | | |
| 0 | | | | | I | | | | |
| | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Explications :

L’axe des abscisses (horizontal) permet de classer les pièces par aires croissantes et l’axe des ordonnées par périmètres croissants.

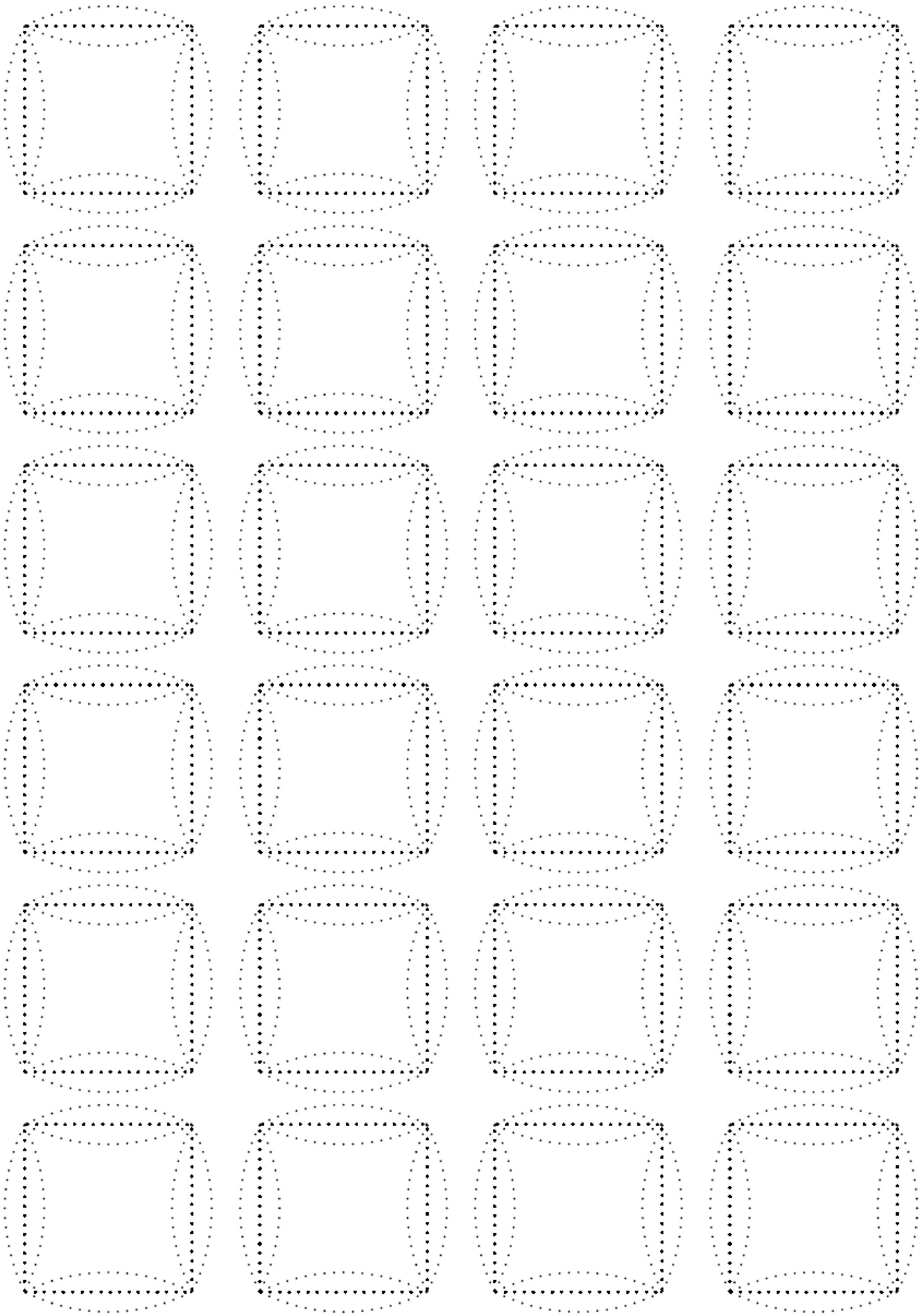
Pour les aires, la pièce de référence est la pièce I. Elle correspond à 0.
Dans la pièce J, le petit morceau qui dépasse du carré vient « en plus » : l'aire de la pièce J est donc légèrement supérieure à l'aire de la pièce I, ce qui correspond à 1.
Pour la pièce K, c'est le contraire, donc son aire est légèrement inférieure à celle de la pièce I. Ce qui correspond à -1.
On procède de même avec des pièces qui ont deux morceaux en plus ou en moins, etc.

Oui, mais ... ce procédé ne « marche pas » pour toutes les pièces !

Prenons l'exemple de la pièce N : il va falloir « découper mentalement » le petit morceau qui dépasse du carré à droite et l'amener, tout aussi mentalement, pour combler le trou en haut et retrouver ainsi la forme de la pièce J ; donc les pièces N et J ont la même aire, ce qui correspond à 1.

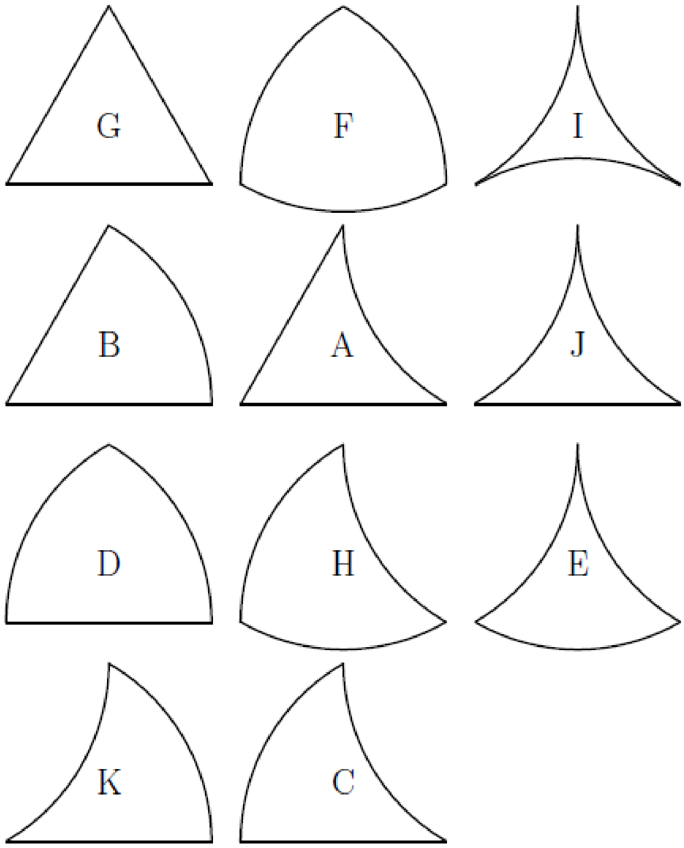
On continue le même procédé pour ranger toutes les pièces : le rangement des pièces selon leurs aires croissantes donnera un tableau à 9 colonnes.

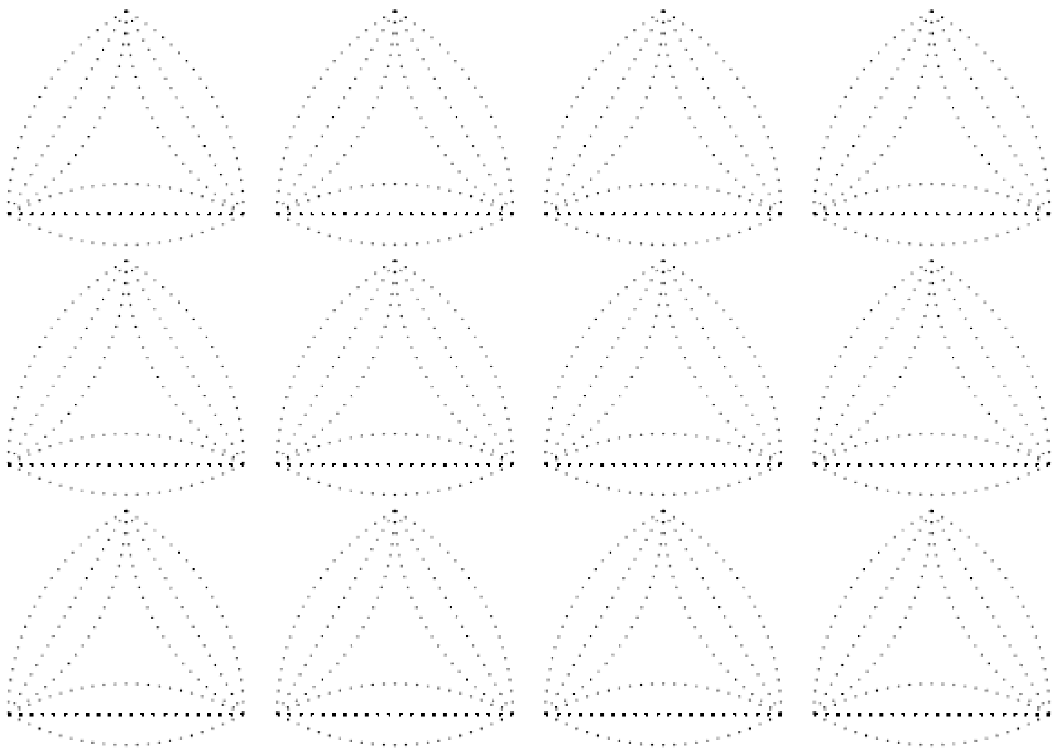
# Annexe IV



# Annexe V

Curvitri



| Fiche d'utilisation | Le domaine | Le niveau de l'activité | Matériel nécessaire |
|---|---|---|---|
| Agrandissements -réductions | Grandeurs | Cycle 3 | Des solides « agrandis-réduits » |

## Qu'est-ce qu' « agrandissement-réduction » ?

Il s'agit d'une activité qui amène les élèves à réfléchir simultanément aux concepts de dimensions, et de proportionnalité. Il n'est pas question, à l'école, de définir un agrandissement-réduction, d'autant que la tâche est délicate. On pourra lire à ce sujet cet article de l'APMEP : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA15006_complet.pdf

## Les objectifs didactiques

- Comprendre les dimensions : longueur, surface, volume ;
- Manipuler pour déconstruire une intuition sans doute trompeuse ;
- S'engager dans une démarche expérimentale qui mène à l'abstraction ;
- Mettre en œuvre le triptyque manipuler-verbaliser-abstraire.

## La mise en œuvre

Étape 1 : l'enseignant montre aux élèves des objets « de même forme » : des tasses, des verres, des pavés droits non cubiques… Il leur propose de réfléchir à la question suivante : ces objets, qui ont « la même forme », sont-ils des agrandissements-réductions les uns des autres ? Les enfants discutent, débattent et argumentent. En général, ils s'accordent à dire que certains objets ne sont pas des agrandissements-réductions les uns des autres, « parce qu'ils ont la même forme pour s'en servir mais pas la même forme géométrique vraiment ». Par exemple, une boîte d'allumettes et un paquet cartonné de spaghettis n'ont pas les mêmes proportions.
Étape 2 : l'enseignant conserve deux objets qui sont un agrandissement-réduction l'un de l'autre, de coefficient 2. S'il n'en a pas, il peut construire des pavés droits à partir de patrons, de sorte que l'un ait des dimensions doubles de l'autre. Il demande aux élèves : si je veux remplir (de semoule, par exemple) le solide le plus grand, à l'aide du plus petit, combien de fois devrai-je verser le contenu du plus petit dans le plus grand ? Les élèves émettent des conjectures et argumentent. En général, aucun élève ne répond « 8 ».
Étape 3 : l'enseignant, ou un élève, réalise l'expérience. On constate ensemble qu'il faut remplir 8 fois le petit solide pour obtenir le remplissage complet du grand solide. C'est l'occasion de discuter des représentations initiales des élèves: pourquoi ont-ils sous-estimé le nombre de transvasements ? Que ressentent-ils au vu de cette erreur ? C'est un moment important car il va leur permettre de comprendre qu'ils peuvent « être sûrs » et se tromper, ce qui sera fondamental dans la suite de leurs apprentissages en général, et mathématiques en particulier.
Étape 4 : pour clore cette activité, il reste à institutionnaliser : pourquoi 8 fois ? Le but est dans un premier temps de faire comprendre aux élèves que si on multiplie les longueurs par 2, on multiplie les aires par 4. On peut s'aider de matériel, en réalisant un agrandissement de coefficient 2. Ensuite on passe aux volumes, par exemple avec des Légos : si j'ai un pavé de dimensions 2, 3 et 4 Légos (pour la largeur, la longueur et la hauteur), comment construire un agrandissement « double » ? Combien y a-t-il alors de briques ? Les élèves vont comprendre que chaque dimension amène à « doubler », et que ce 8 s'explique : c'est $2{\times}2{\times}2$. Cela peut faire l'objet d'une verbalisation collective, pour un affichage sur lequel figurent des photos ou des dessins des expériences réalisées.

## Remarques et prolongements

- À l'école, des objets cubiques ne conviennent pas car des cubes sont toujours des agrandissements-réductions les uns des autres, en raison de leur régularité ;
- Des tasses ou des verres cylindriques présentent un obstacle, en raison de leur base circulaire. Un pavé est mieux adapté car ses trois dimensions sont clairement identifiables ;
- On peut aussi insérer une étape de reconnaissance d'agrandissements-réductions par déformation de photos, comme dans l'article de l'APMEP cité au début de cette fiche.

| Fiche d'utilisation | Le domaine | Le niveau de l'activité | Matériel nécessaire |
|---|---|---|---|
| **Les bloups** | Nombres et calcul<br>Grandeurs | Cycles 2 et 3 | Des pièces de 7 bloups<br>Des pièces de 3 bloups |

# Que sont les bloups ?

Les bloups sont une monnaie fictive qui ne se présente qu'avec des pièces de 7 bloups et des pièces de 3 bloups. Comment payer avec cette monnaie ? Peut-on tout acheter ? Comment organiser une monnaie efficace ?

# Les objectifs didactiques

- Mettre en œuvre le triptyque Manipuler Verbaliser Abstraire dans ses trois dimensions.
- Organiser la recherche, face à une tâche déstabilisant les connaissances acquises liées au quotidien.
- Anticiper et développer des stratégies efficaces.
- Calcul mental, compositions et décompositions de nombres.
- Lien avec la monnaie (et double sens du mot somme).

# La mise en œuvre

Étape 1 : présentation des bloups. Chaque élève reçoit 7 pièces de 3 bloups et 3 pièces de 7 bloups.
<u>Question</u> : Peut-on acheter ces objets étiquetés 3 bloups, 6 bloups, 5 bloups, 10 bloups, 13 bloups, 21 bloups ? Cette question se traite *a priori* sans rendu de monnaie.

- La commutativité de l'addition est à aborder explicitement (On obtient 10 bloups avec une pièce de 3 bloups et une de 7 bloups, dans l'ordre que l'on veut.)
- Il peut exister des décompositions complètement différentes. (21 bloups s'obtiennent avec 7 pièces de 3 bloups ou 3 pièces de 7 bloups.)
- Il n'est pas possible d'obtenir directement 5 bloups avec les pièces en main.

Étape 2 : quelles sommes peuvent-elles être obtenues avec les pièces que nous avons en main ?
<u>Recherche</u> des élèves, puis synthèse collective. On peut opter pour une stratégie de recherche efficace, en utilisant un tableau à double entrée, qui donne les sommes obtenues selon le nombre de pièces de 3 bloups et le nombre de pièces de 7 bloups, à condition que cela n'induise pas une stratégie unique de raisonnement.
Avec seulement deux types de pièces, on obtient déjà beaucoup de possibilités. Avec des pièces de 3 bloups et de 7 bloups les sommes : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 et 11 ne pourront pas être obtenues par addition.

Étape 3 : le rendu de monnaie
<u>Question</u> : Comment faire si l'on veut acheter quand même un objet qui coûte 5 bloups?
Les enfants doivent penser au rendu de monnaie (Le marchand dispose de bloups en quantité suffisante). Plusieurs possibilités apparaissent : 5 bloups = 12 bloups – 7 bloups ou 5 bloups = 14 bloups – 9 bloups On introduit l'addition à trou et/ou la soustraction dans les calculs, par le rendu de monnaie.
<u>Recherche</u> des différentes manières d'atteindre les sommes : 1 ; 2 ; 4 ; 8 et 11 bloups. On essaie, tous ensemble, de dégager une stratégie : pour pouvoir rendre la monnaie, il faut impérativement donner un montant supérieur à la somme visée.

Étape 4 : comment atteindre toutes les sommes sans rendu de monnaie ?
<u>Question</u> : Quelle pièce pourrait-on inventer pour éviter le rendu de monnaie ? Discussion sur les avantages et inconvénients des valeurs proposées.
Les enfants vont se rendre compte que la pièce d'1 bloup permet d'éviter le rendu de monnaie.

Prolongement, pour le cycle 3 : les bloupies (voir fiche d'utilisation bloupies)

# Annexe

Tableau indiquant les sommes en bloups que l'on peut atteindre
à l'aide de 7 pièces de 3 bloups et de 3 pièces de 7 bloups

| nombre de pièces de 3 / nombre de pièces de 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| 1 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 |
| 2 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 |
| 3 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 |

| Fiche d'utilisation | Le domaine | Le niveau de l'activité | Matériel nécessaire |
|---|---|---|---|
| **Les bloupies** | Proportionnalité<br>Fractions<br>Grandeurs | Cycle 3 | Aucun matériel, ou des pièces de bloups et de bloupies |

# À la recherche des bloupies.

La recherche des bloupies ne peut se faire qu'après avoir rencontré les bloups (voir Fiche d'utilisation Les bloups). Il s'agira de créer un sous-multiple du bloup qui permettra de payer toutes les sommes, entières ou non.

# Les objectifs didactiques

- Mettre en œuvre le triptyque Manipuler **Verbaliser Abstraire** dans deux de ses trois dimensions.
- Utiliser les propriétés de la proportionnalité.
- Utiliser des fractions.
- Lien avec notre monnaie européenne : pourquoi des centimes d'euros ? (lien centimes et centièmes)

# La mise en œuvre

## Étape 1 : Comment payer des sommes non entières ?

- Question : 1m de tissu coûte 1 bloup. Comment va-t-on faire pour payer 50 cm de tissu ? 20 cm ? 60 cm ? 95 cm ? 32 cm ? 47 cm ?
- Discussion pour aboutir à la nécessité de fractionner le bloup et de créer le bloupy.
- Recherche en groupe, chaque groupe s'occupant d'une longueur de tissu à payer.
- Utilisation des propriétés de la proportionnalité.
- Mise en commun : Reprise des propriétés de la proportionnalité utilisées.

Les propositions de fractionnement peuvent être différentes selon les groupes.

- Question : En combien doit-on fractionner le bloup pour que tous les groupes puissent payer leur longueur de tissu ?
- Mise en commun et **création du bloupy** valant un centième de bloup (car 1 m = 100 cm).

Avec des bloupies valant un centième de bloup, on peut payer toutes les longueurs de tissu proposées.
Il se peut que devant le nombre de pièces de 1 bloupy nécessaires, les élèves réclament une nouvelle pièce, valant 10 bloupies (soit un dixième de bloup) !

## Étape 2 : Mise en parallèle avec notre système de monnaie européenne

Établir une correspondance (et non une égalité) entre les bloups et les euros, les bloupies et les centimes d'euros.

## Prolongement : Poursuivre le travail sur le système monétaire européen

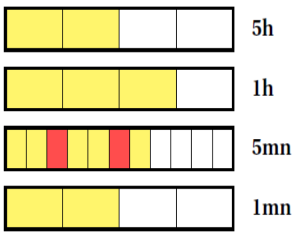
On pourra chercher comment ont été choisies les valeurs de nos pièces et billets (2€ ; 5€ ; 10€ ; 50c ; 20c ; 10c ; etc.) pour aboutir à la cohérence de notre système décimal (numération, multiples, diviseurs, fractions).

| Fiche d’utilisation | Le domaine | Le niveau de l’activité | Matériel nécessaire |
|---|---|---|---|
| Ich bin ein Berliner | Grandeurs et mesures | Cycle 2 | Matériel de vidéo projection<br>3 horloges à aiguilles (en carton) |

# Qu’est-ce que l’horloge de Berlin ?

Le Mengenlehreuhr ou Berlin-Uhr ( « Berlin Clock ») est la première horloge publique dans le monde qui indique le temps au moyen de champs lumineux.

https://en.wikipedia.org/wiki/Mengenlehreuhr




Il est 13h37 min

Elle se compose de 24 lumières. Les deux premières lignes indiquant les heures et les deux rangées inférieures indiquant les minutes.

Il y a tout au-dessus une lumière jaune, clignotant circulaire pour désigner les secondes. Chaque lumière de la première ligne représente 5 heures, chaque lumière de la deuxième ligne représente 1 heure, chaque lumière de la troisième ligne représente 5 minutes (les lumières rouges indiquent les quarts d’heure) et enfin chaque lumière de la dernière ligne représente 1 minute.

# Les objectifs didactiques

- Activer les deux premières dimensions du triptyque manipuler-verbaliser-abstraire.
- Utiliser une horloge « exotique » pour mieux comprendre la lecture de l’horloge à aiguilles.
- Caractériser des relations de congruence entre les entiers.
  (Le chiffre 1 correspond à la fois à 1h ; 5 secondes (1x5s) ; 5min (1x5min) et à 13h (1h+12h)).
- Mémoriser des faits numériques et des procédures.

# La mise en œuvre

Étape 1 : Présentation de l’horloge de Berlin et de son fonctionnement

Étape 2 : Les élèves s’entraînent à lire différentes heures, mais aussi à colorier les rectangles en fonction de l’heure proposée.

Étape 3 : Puis vient cette première étape clef. Nous abordons les groupements-échanges entre les lignes en partant du clignotement du disque des secondes dans cette vidéo https://vimeo.com/242156468 (attention il y a un mouvement de caméra et il s’agira de garder le tempo avec les élèves). Ainsi pourront se construire les premières relations entre les secondes et la minute ; entre les minutes et l’heure ; entre les heures et la journée.
C’est le moment également de distinguer 5 minutes ; 1 heure et 13 heures visuellement, mais aussi midi et minuit ; le matin et l’après-midi pour préparer la prochaine étape.

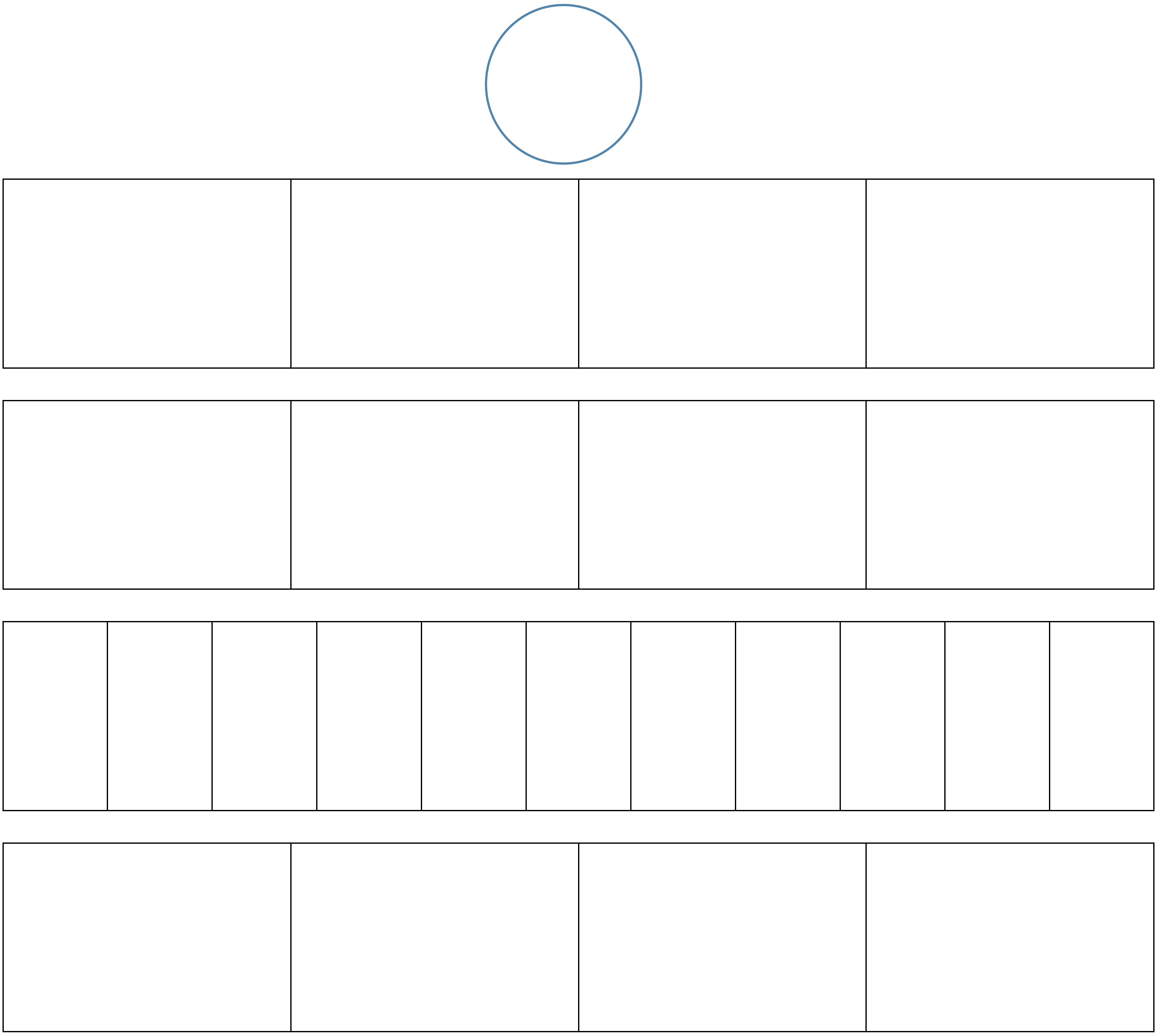
Étape 4 : Dans cette deuxième étape clef, il s’agit de faire le parallèle entre une horloge à aiguilles et l’horloge de Berlin. Pour cela il faudra 3 horloges : celle des minutes et secondes, celle des heures du matin et celle des heures de l’après-midi. En observant la première qui sera composée des secondes et des minutes, on pourra faire un premier parallèle avec l’horloge de Berlin. Puis il s’agira de gérer les équivalences entre 59min et 60 s et 60min ; et entre 60 min et 1h. Enfin il faudra également gérer les heures du matin et de l’après-midi. Pour cela on pourra modifier les pendules afin de distinguer ces heures.

Étape 5 : Le travail de lecture de l’heure se poursuit sur ces 3 pendules puis il s’agira de travailler la congruence afin d’aboutir à une seule pendule.

# Remarque :

- Une des raisons pour lesquelles nous pouvons faire cette décomposition est le fait que 1min divise 5 min, qui elles-mêmes divisent 60min (1h), qui elles-mêmes divisent 300min (5h).

# ANNEXE I



**HORLOGE DE BERLIN À PROJETER**

| Fiche d'utilisation | Le domaine | Le niveau de l'activité | Matériel nécessaire |
|---|---|---|---|
| Tic tac | Grandeurs et mesures | Cycles 2 et 3 | Tout le bazar auquel vous pourrez penser<br>Des bouteilles, des bouchons, des verres doseurs, des pailles, des kapla, des billes, de la ficelle… |

# Qu'est-ce que tic tac ?

Tic tac est une activité qui permet de faire comprendre aux enfants la nécessité de mesures objectives de durées. Elle met les enfants en situation de chercheurs et permet de les placer dans une démarche scientifique d'expérimentation.

# Les objectifs didactiques

- Mettre en œuvre le triptyque Manipuler Verbaliser Abstraire dans ses trois dimensions.
- Organiser la recherche, face à une tâche déstabilisant les représentations préconçues.
- Tenter de développer des stratégies efficaces, les critiquer.
- Faire le lien avec les unités de durées.

# La mise en œuvre

Étape 1 : l'enseignant annonce aux élèves qu'ils vont écouter trois extraits musicaux, l'un après l'autre. Ils devront les ordonner, de la durée la plus courte à la durée la plus longue. On annonce aux élèves que toute référence aux unités de temps usuelles est interdite : on ne doit pas regarder une montre, une horloge. Les morceaux choisis doivent être réfléchis en amont : un plus long mais au rythme rapide, un dont le rythme varie… Le temps de diffusion varie selon l'âge des enfants, mais doit être court pour leur permettre de se concentrer : 30 secondes, c'est déjà très long ! On recense les réponses des élèves, qui sont variées.

Étape 2 : l'enseignant explique aux élèves qu'ils vont à nouveau entendre ces trois extraits. Mais cette fois, il va leur laisser le temps de réfléchir à un dispositif qui leur permette, individuellement ou en groupe, de comparer de façon plus objective les durées. L'enseignant a du matériel à disposition, et les enfants peuvent venir demander s'ils ont besoin de construire ou de fabriquer un outil de mesure. À cette étape, l'enseignant a intérêt à ne pas montrer le matériel, sans quoi il oriente la recherche des enfants. Les enfants réfléchissent, construisent ou élaborent leur dispositif, et on réécoute les extraits. On recense à nouveau les réponses : elles demeurent variées, en général, mais différemment. Beaucoup ont changé d'avis, les durées « extrêmes » ont été identifiées. Mais il n'y a toujours pas consensus.

Étape 3 : l'enseignant organise un débat, une analyse de chaque procédure : quels points forts ? Quels défauts ? Pourquoi des procédures qui semblent pertinentes aux élèves ne mènent pas à la même conclusion ? On amène les enfants à réfléchir à la nécessité de se donner un étalon pour mesurer le temps. On arrive ainsi à étudier notre système de mesure des durées, mais avec un abord différent : nous en avons besoin !

Étape 4 : l'enseignant institutionnalise avec les enfants, et produit une trace écrite qui dépend du niveau d'enseignement. Les expérimentations peuvent y figurer, y compris celles qui n'étaient pas pertinentes, avec leur analyse. L'enseignant insistera sur la notion implicite de proportionnalité. Il pourra, s'il le souhaite, raconter aux enfants l'histoire de la mesure du temps.

# Annexe

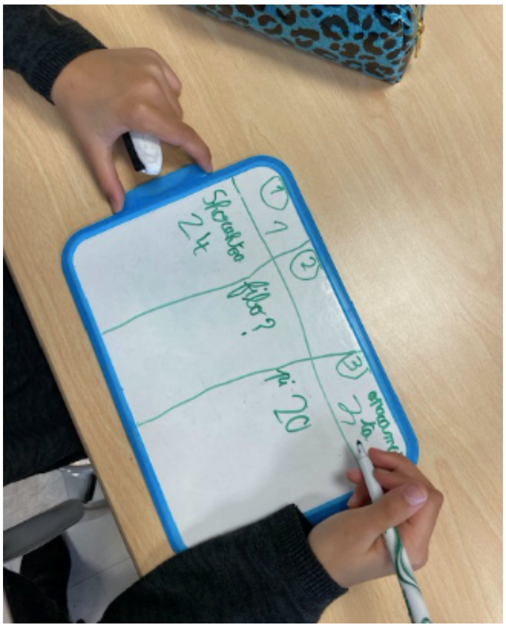
Proposition de morceaux musicaux, dont il ne faut prélever qu'un extrait :

https://www.youtube.com/watch?v=ZkheJDcld0E

https://www.youtube.com/watch?v=IGJeGOw8TzQ (à partir de 51s)

https://www.youtube.com/watch?v=3HRkKznJoZA&frags=pl%2Cwn

Exemples de réalisation d'élèves :



À gauche, une élève compte mentalement ;

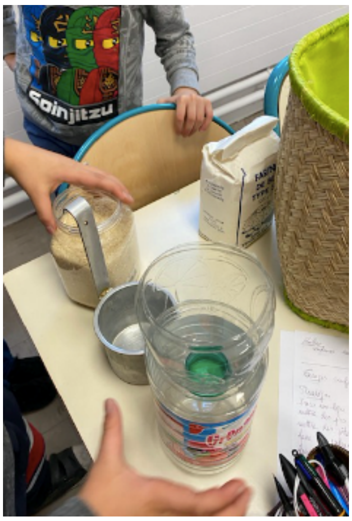
À droite, un élève a réalisé un cadran solaire, et pense pouvoir mesurer les durées en l'utilisant.

À gauche, des élèves ont déposé « régulièrement » des lentilles et se proposent de les dénombrer ;

À droite, un élève a tracé des lignes pendant la diffusion de chaque extrait, et il veut comparer des longueurs.

En haut, les enfants dénombrent leurs pas ou « les objets de la classe ».

En bas, de multiples versions de sabliers ont été proposées.



Exemples de réalisations de formateurs :